數學傳播 48卷2期, pp. 31-50

半經典分析與多複變函數論

蕭欽玉

謹以此文獻給張清煇教授

張清煇教授爲中研院數學所的退休研究員, 張清煇教授和李宣北教授爲筆者當年在中研院當研習員時的指導老師。張清煇教授的研究領域爲微局部分析及多複變函數論, 師從分析大師 Mohammed Salah Baouendi。張清煇教授和 Baouendi, Tréves 在 83 年 JDG 的文章中, 發展了一套柯西黎曼流形上的微局部超解析性的理論 (general theory of microlocal hypo-analyticity on Cauchy-Riemann manifolds), 是這方面的研究的奠基性工作。之後張清煇教授持續地在多複變函數論裡作出貢獻。讓筆者印象深刻的工作之一是張清煇教授和李宣北教授在 2000 年左右在弱擬凸域上利用積分表示法成功的構造出 $\overline{\partial}$ 方程的解並建立了 L^p 的估計, 這類的工作這幾年在代數幾何上有應用, 原因是在代數幾何裡需要處理有奇異點的複流形上的 $\overline{\partial}$ 方程, 這類的積分表示的方法就扮演著重要的角色; 張清煇教授和李宣北教授的工作可說是這方面的研究的先驅。張清煇教授的研究工作就像他的爲人一樣, 樸實, 不譁衆取寵, 不浮誇但卻是扎實且有歷史價值的學術工作。

筆者當年到中研院當研習員時, 受到當時學習環境的影響, 一心想從事代數幾何或數論的研究。劉太平院士在研習員上班第一天找大家講話, 要大家 open mind, 多看看其他領域, 不要限制在自己的世界上。劉太平院士簡潔有力的話促使我去了解其它領域。當時張清煇教授和李宣北教授正爲他們的研究生組織位勢論 (potential theory) 及多複變函數論的研討班, 我聽了幾次就深深的被多複變函數論所吸引。多複變函數論裡的複維數多一維則實維數多兩維及複結構的變化等現象給了我無窮的幾何及分析的想像力。此外, 現代數學的許多起源如層 (sheaf) 的概念, 微局部分析, 代數分析學 (Hörmander, Sato, Kashiwara 的工作) 都是由多複變函數論裡的分析及幾何問題引出; 多複變函數論可說是數學的核心學問之一。之後張清煇教授及李宣北教授同意指導我, 在他們的指導下我學習到許多多複變函數論的知識及技巧, 尤其是 Hörmander 的工作以及看待數學的方法, 那一年的研習對我終身受用。張清煇教授及李宣北教授對學生有耐心, 循循善誘, 一切都從學生的角度設想。

在當年研習的過程中, 張清煇教授不斷地提到做數學要有自己的觀點, 不能人云亦云, 最好是能夠從自己的觀點來給予古典數學新的生命力。筆者這幾年試著把半經典分析帶入傳統多複變的研究。呼應張清煇教授的數學觀, 本文將介紹基本的半經典分析及多複變函數論, 並介紹

如何用半經典分析來研究古典的多複變函數論的問題; 希望能讓讀者了解基本的半經典分析及多複變函數論。此文獻給張清煇教授, 紀念一位淡泊名利, 不忮不求的了不起的學者。

1. 半經典分析

半經典極限 (semi-classical limit) 是一種從大規模的量子 (large quantum) 或能量或軌跡取極限的過程。半經典分析是研究半經典極限所發展出來的一門分析學問。半經典分析在近代數學的發展, 如複幾何 (complex geometry), 幾何量化 (geometric quantization theory), 局部指標定理 (local index theorem) 及數學物理等領域都扮演著重要的角色。在這一節中, 我將透過簡單的數學上的例子, 讓讀者了解半經典分析在數學上的意義, 希望讀者能體會半經典分析的基本精神。

我們考慮如下的廣義的高斯積分 (Gaussian integral):

$$\int_{\mathbb{B}} e^{-x^2+ix^4}\chi(x)dx, \tag{1}$$

其中, $\chi \in \mathcal{C}^\infty_c(D)$, χ在實數軸的原點附近均爲 1, D 是在實數軸的原點附近的小的開集合 (a small open set of 0 in $\mathbb{B}$)。現代數學的許多重要問題都和研究這類的積分有關, 但一般而言很難得到這類積分的明確表示式。我們把問題稍作點變化, 考慮如下的積分:

$$I_k := \int_{\mathbb{B}} e^{k(-x^2+ix^4)}\chi(x)dx, \tag{2}$$

這邊 k 是一個大的正的常數, 把之前的問題變成我們是否能了解積分 (2) 在 k 很大時的行爲? 這個問題相較於找出積分 (1) 的明確表達式要簡單很多。藉由變數變換 ($x \to \frac{x}{\sqrt{k}}$), 我們有

$$I_k := \int_{\mathbb{B}} e^{k(-x^2+ix^4)}\chi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{\mathbb{B}} e^{-x^2+ik(\frac{x}{\sqrt{k}})^4}\chi\Big(\frac{x}{\sqrt{k}}\Big)dx.$$

由實分析裡的樂貝格定理 (Lebesgue dominate theorem), 我們可得到

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt{k}I_k = \int_{\mathbb{B}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}. \tag{3}$$

很多牽涉到要了解積分 (1) 的問題, 其實不需找出積分 (1) 的明確表達式, 只要了解積分 (2) 在 k 很大時的行爲就足夠了。這樣地把參數 k 放進想了解的方程中, 並研究 k 很大的行爲的想法, 正是半經典分析最重要的精神。

半經典分析不但能簡化問題, 還能衍生出許多豐富的結果。以上面的積分 (2) 爲例, 一個很自然的問題就是能否得到積分 (2) 對於 k 的完整漸近展開 (asymptotic expansion)? 爲了要完整的回答這個問題, 推進了分析學如傅氏分析 (Fourier analysis) 的進展。底下提到的穩定相公式 (stationary phase formula) 就是研究這方面的問題的好工具:

定理 1.1 (霍曼德的穩定相公式 (stationary phase formula of Hörmander))**.** 令 D 爲 $\mathbb{B}^n$ 裡的一個開集, 且令 $F \in \mathcal{C}^\infty(D)$, $\operatorname{Im} F \geq 0$。假設 $\operatorname{Im} F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, $\det F''(0) \neq 0$ 且對所有 $x \in D$, $x \neq 0$, $F'(x) \neq 0$。給定一個$u \in \mathcal{C}_c^\infty(D)$, 則我們有如下的漸近展開: 對所有 $N \in \mathbb{N}$, 我們有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}^n} e^{ikF(x)} u(x) dx \\ &= e^{ikF(0)} \det \left(\frac{kF''(0)}{2\pi i} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j<N} k^{-j} (L_j u)(0) + O(k^{-N}),\end{aligned} \tag{4}$$

其中 L_j 爲一個階數小於或等於$2j$的線性偏微分算子, 特別的是$L_0 = I$.

值得注意的是從 (4) 中, 我們可看出, 這個積分 $\int_{\mathbb{B}^n} e^{ikF(x)} u(x) dx$ 只依賴於函數 u 在原點 (臨界點 (critical point)) 的行爲。

接下來我們以珈瑪函數 (Gamma function) 爲例, 說明半經典分析的概念及如何使用定理 1.1。對一個實部大於 -1 的複數 λ, 考慮

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\lambda dt. \tag{5}$$

$\Gamma(\lambda + 1)$ 即爲珈瑪函數。我們現只考慮λ爲實數的情況。我們來研究珈瑪函數的半經典極限行爲也就是要研究 $\Gamma(\lambda + 1)$ 當 λ 很大時的行爲。在積分 (5) 裡令 $t = \lambda(1 + s)$, 則我們可改寫積分 (5):

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda + 1) &= \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(1+s)} \lambda^{\lambda+1} (1 + s)^\lambda ds \\ &= e^{-\lambda} \lambda^{\lambda+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s - \log(1+s))} ds.\end{aligned} \tag{6}$$

我們現在研究這積分

$$e^\lambda \lambda^{-\lambda-1} \Gamma(\lambda + 1) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s - \log(1+s))} ds \tag{7}$$

當 λ 很大時的漸近行爲。令 $u \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, u 在實數軸上的原點附近爲 1, 這邊 U 是實數軸上原點附近的開集。利用 u 我們把積分 (7) 拆成兩個部分:

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s - \log(1+s))} ds \\ &= \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s - \log(1+s))} u(s) ds + \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s - \log(1+s))} (1 - u(s)) ds.\end{aligned} \tag{8}$$

令 $F(s) := s - \log(1+s)$。因為在 $s=0$ 外面, $F'(s) \neq 0$, 我們可以利用分部積分而得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda F(s)}(1-u(s))ds \\
&= \int_{-1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-\lambda F(s)}\Big)\frac{1}{-\lambda F'(s)}(1-u(s))ds \\
&= \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda F(s)}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{\lambda F'(s)}(1-u(s))\Big)ds \\
&= O(\lambda^{-1}).
\end{aligned}$$

我們可重複上述的步驟任意多次而得到對所有 $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s-\log(1+s))}(1-u(s))ds = O(\lambda^{-N}). \tag{9}$$

一個積分 A 若滿足 (9) 的性質, 則我們記為 $A = O(\lambda^{-\infty})$。利用這記號, 我們有

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s-\log(1+s))}(1-u(s))ds = O(\lambda^{-\infty}). \tag{10}$$

從霍曼德的穩定相公式定理 1.1, 我們得到

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(s-\log(1+s))}u(s)ds = \sqrt{2\pi}\lambda^{-\frac{1}{2}} + a_1\lambda^{-\frac{3}{2}} + a_2\lambda^{-\frac{5}{2}} + \cdots. \tag{11}$$

這邊a_j, $j = 1, 2, \ldots$, 都是實數。從 (6), (8), (10), (11), 我們得到

$$\Gamma(\lambda+1) = (\frac{\lambda}{e})^{\lambda}\sqrt{2\pi\lambda}(1 + b_1\lambda^{-1} + b_2\lambda^{-2} + \cdots). \tag{12}$$

這邊 b_j, $j = 1, 2, \ldots$, 都是實數。值得注意的是這些 b_j, $j = 1, 2, \ldots$, 都是可計算的。我們把 (12) 稱作珈瑪函數的半經典漸近展開。

利用分部積分不難證明對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$。從這觀察及(12), 我們得到

$$n! = (\frac{n}{e})^{n}\sqrt{2\pi n}(1 + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \cdots).$$

特別地我們得到史特靈公式 (Stirling's formula):

$$\Gamma(n+1) = n! = (\frac{n}{e})^{n}\sqrt{2\pi n}(1 + O(n^{-1})).$$

從以上的討論可看出探討半經典極限會引出許多豐富的結果。

2. 多複變函數論

多複變函數論是爲了要推廣複平面的分析與幾何的結果到高維而發展起來的一門學問。因爲複高維和複一維的分析與幾何本質上的不同, 這樣的推廣不論是從幾何或分析上都需要發展新的, 深入的學問才能達成, 也讓數學家們更了解事物的本質。多複變函數論的創始者爲日本數學家岡潔 (Oka)。爲了呈現岡潔的工作的深入及細膩度, 亨利卡當 (Henri Catan) 組了一個研討班來專門研究岡潔的工作, 也因此引入了層 (sheaf) 的概念。有關岡潔的工作, 讀者可參閱 [4]。之後, 許多數學家開始用偏微分方程的角度來研究多複變函數論, 最重要的有美國普林斯頓的孔恩 (Kohn) 教授, 瑞典數學家霍曼德 (Hörmander) 等人。有關這方面的工作可參考 [2], [5], 其中 [2] 爲兩位台灣的傑出數學家清華大學程守慶教授及美國聖母大學蕭美琪教授的著作, 爲現今多複變函數論裡非常重要的參考著作。在這一節中, 礙於篇幅, 筆者只由單複變函數論的黎曼映射出發, 討論爲了研究高維時黎曼映射的推廣而引發的多複變的問題。有關多複變函數論的全面性介紹, 也許擇日再撰文介紹。

2.1. 黎曼映射定理

在數學中, 黎曼映射定理是單複變函數論裡最重要的結果之一, 此結果分類了 $\mathbb{C}$ 的單連通開子集。底下, 我們回憶一下黎曼映射定理:

定理 2.1 (黎曼映射定理(Riemann mapping theorem))**.** 令 U 爲一個在複平面 $\mathbb{C}$ 的非空的單連通開子集, $U \neq \mathbb{C}$, 且令

$$D := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$$

爲複平面 $\mathbb{C}$ 的單位圓盤。則存在一個一對一且蓋射的雙全純映射 (*biholomorphic mapping*)

$$f : U \to D.$$

換言之, U 和 D 爲雙全純同構。

黎曼在他 1851 年的博士論文中陳述了這個結果。研究相關黎曼映射定理在 $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, 的情形, 一直是多複變函數論的重要問題。有反例說明黎曼映射定理在高維時並不成立。當定理 2.1 中的 U 的邊界 (boundary of U) 爲平滑時 (smooth), 可證明定理 2.1 中的 f 可平滑的延拓到 U 的邊界。在高維時, 雖然黎曼映射定理不存在, 但一個重要的問題是給定一個雙全純映射 $f : U_1 \to U_2$, U_1, U_2 爲 $\mathbb{C}^n$ 裡某一類重要的域 (domain), 要瞭解何時 f 可平滑的延拓到 U_1 的邊界。爲了具體陳述這問題, 我們需要引入一些定義。

令 $M := \{z \in \mathbb{C}^n;\ \rho(z) < 0\}$, 其中 $\rho \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, 當 z 落在在 M 的邊界 $\partial M = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \rho(z) = 0\}$ 上時, $d\rho(z) \neq 0$。我們稱 ρ 爲 M 的定義函數 (defining function)。在

本文中, 我們用 $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $z_j=x_{2j-1}+ix_{2j}$, $j=1,\ldots,n$, 爲 $\mathbb{C}^n$ 上的複座標。我們用$x=(x_1,\ldots,x_{2n})$ 來表示 $\mathbb{C}^n$ 的實座標。我們用以下的符號:

$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}-i\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\Big),\quad j=1,\ldots,n.$$

定義 2.2. 我們使用之前的符號。對每一點 $z\in\partial M$, 我們稱這個向量空間

$$T^{1,0}_z(\partial M)=\left\{\sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial}{\partial z_j};\ a_j\in\mathbb{C},\quad j=1,\ldots,n,\quad \sum_{j=1}^n a_j\frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)=0\right\}$$

爲 ∂M 在 z 點的柯希黎曼結構 (*Cauchy-Riemann structure*)。

固定一點 $z\in\partial M$, 由基本的線性代數可看出 $\dim_{\mathbb{C}}T^{1,0}_z(\partial M)=n-1$. 令 $Z:=\{Z_1,\ldots,Z_{n-1}\}$ 爲 $T^{1,0}_z(\partial M)$ 的一組基底。我們可把每個 Z_j 寫成:

$$Z_j=\sum_{s=1}^n a_{j,s}\frac{\partial}{\partial z_s},\quad a_{j,s}\in\mathbb{C},\quad s=1,\ldots,n-1.$$

對所有的 $j,\ell=1,\ldots,n-1$, 令

$$b_{j,\ell}=\sum_{s.t==1}^n\frac{\partial^2\rho}{\partial z_s\partial\overline{z}_t}(z)a_{j,s}\overline{a_{\ell,t}}. \tag{13}$$

若讀者熟悉複微分形式 (complex differential form), 不難看出 $b_{j,\ell}=\partial\overline{\partial}\rho(z)(Z_j,\overline{Z_\ell})$, $j,\ell=1,\ldots,n-1$。我們稱這個矩陣

$$\mathcal{L}_{z,Z}:=(b_{j,\ell})_{j,\ell=1}^{n-1}$$

爲對於 Z 的 Levi 矩陣 (Levi matrix with respect to the basis Z)。

定義 2.3. 我們使用之前的符號。我們稱 M 爲一個強擬凸域 (*strongly pseudoconvex domain*) 如果對每一點 $z\in\partial M$, 存在 $T^{1,0}_z(\partial M)$ 的一組基底 $Z:=\{Z_1,\ldots,Z_{n-1}\}$ 使得對於 Z 的 Levi 矩陣 $\mathcal{L}_{z,Z}$ 爲正定矩陣。

提醒讀者注意, 由基本的線性代數可知, 若存在 $T^{1,0}_z(\partial M)$ 的一組基底 $Z:=\{Z_1,\ldots,Z_{n-1}\}$ 使得對於 Z 的 Levi 矩陣 $\mathcal{L}_{z,Z}$ 爲正定矩陣, 則對任何 $T^{1,0}_z(\partial M)$ 的一組基底 $Z:=\{Z_1,\ldots,Z_{n-1}\}$, 對於 Z 的 Levi 矩陣 $\mathcal{L}_{z,Z}$ 都是正定矩陣。底下是多複變函數論裡的重要問題之一:

問題 2.1. 給定兩個 $\mathbb{C}^n$ 裡的有界的強擬凸域 M_1, M_2。假設

$$F:M_1\to M_2$$

爲一個雙全純映射。則 F 是否可平滑的延拓到 M_1 的邊界?

我們把 F 寫成

$$
\begin{aligned}
F: M_1 &\to M_2,\\
z &\to (F_1(x),\ldots,F_n(z)).
\end{aligned}
$$

提醒讀者注意, F 爲全純映射的意思是 $\frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}_\ell}=0$, 對於所有 $j,\ell=1,\ldots,n$, 其中

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\ell}=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{2\ell-1}}+i\frac{\partial}{\partial x_{2\ell}}\Big),\quad \ell=1,\ldots,n.
$$

F 爲雙全純映射的意思是 F 爲全純映射且 F 爲一對一且蓋射的映射。

問題 2.1 在多複變的發展史上扮演著重角色。查理·費福曼 (Charles Fefferman) 在 1974 年解決了這問題, 這是他拿到費爾茲獎的工作之一。我們把費福曼的結果寫成如下的定理:

定理 2.4 (費福曼, 1974)**.** 給定兩個 $\mathbb{C}^n$ 裡的有界的強擬凸域 M_1, M_2。假設

$$
F: M_1 \to M_2
$$

爲一個雙全純映射。則 F 可平滑的延拓到 M_1 的邊界。

要證明定理 2.4, 我們需要瞭解柏格曼核 (Bergman kernel)。下一節我們將介紹柏格曼核, 並在本文的最後一節, 我們將解釋如何用半經典分析的方法來證明定理 2.4。

2.2. 柏格曼核

我們在這一節中將介紹柏格曼核的基本定義並計算單位球上的柏格曼核給讀者參考。我們固定一個強擬凸域

$$
M := \{z\in\mathbb{C}^n;\ \rho(z)<0\}.
$$

我們用這符號 $\mathcal{C}^\infty(M)$ 來表示在 M 上的所有的平滑函數。對一個函數 $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$, 我們說 $f\in\mathcal{C}^\infty_c(M)$ 如果 f 的支集 (support) 爲 M 裡的緊緻子集 (f has compact support in M)。在 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$ 上我們選下列的 L^2 內積:

$$
(\,f\,|\,g\,)_M := \int_M f\overline{g}dx,
$$

其中$f,g\in\mathcal{C}^\infty_c(M)$, dx 爲一般的歐式空間的測度。令 $L^2(M)$ 爲 $\mathcal{C}^\infty_c(M)$ 針對內積 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_M$ 的完備空間 (completion with respect to $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_M$)。令

$$
H^0(M) := \Big\{u\in L^2(M);\ \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}=0,\quad j=1,\ldots,n\Big\}, \tag{14}
$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}$ 是以分佈的方式定義 (in the sense of distribution)。我們稱 $H^0(M)$ 爲 M 上的 L^2 全純函數。令

$$\{f_1, f_2, \ldots\} \subset H^0(M)$$

爲 $H^0(M)$ 內的一組根據 $(\cdot\,|\,\cdot)_M$ 的單位正交基底 (orthonormal basis with respect to $(\cdot\,|\,\cdot)_M$)。

定義 2.5 (柏格曼核)**.** 底下的無限和:

$$B(z,w) := \sum_{j=1}^{+\infty} f_j(z)\overline{f_j(w)} \tag{15}$$

稱爲 M 上的柏格曼核 (Bergman kernel)。

提醒讀者注意, (15) 式雖然是無限和, 但可證明這無限和是一個 $M \times M$ 上的分佈 (distribution on $M \times M$)。此外, 由橢圓偏微分方程的理論可證明

$$B(z,w) \in \mathcal{C}^\infty(M \times \overline{M}), \quad B(z,w) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M} \times M). \tag{16}$$

(16)的意思是說固定一點 $x_0 \in M$ (x_0 在 M 的內部), $y_0 \in \overline{M}$ (y_0 可在 M 的內部或 M 的邊界), 則 $B(z,w)$ 在 x_0, y_0 附近都是平滑的。一個自然衍生的問題就是能否刻劃 $B(z,w)$ 的邊界行爲。這是一個困難的問題且這問題和問題 2.1有關。費福曼 (Fefferman) 用深入的調和分析仔細的研究 $B(z,w)$ 的邊界行爲。底下爲費福曼的結果:

定理 2.6 (費福曼, 1974)**.** 在之前的符號之下, 我們有

$$B(z,z) = \frac{a(z)}{\rho(z)^{n+1}} + b(z)\log(-\rho(z)), \quad a, b \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}), \tag{17}$$

$a|_{\partial M} \neq 0$.

提醒讀者注意 $a \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ 的意思是 $a \in \mathcal{C}^\infty(M)$ 且 a 可平滑的延拓到 M 的邊界。由 (17) 讀者可看出, $B(z,w)$ 在邊界上有奇異點 (singularities)。利用定理 2.6, 費福曼完全解決了問題 2.1, 即證明了定理 2.4。底下舉一個例子讓讀者對定理 2.6有更進一步的了解。

例子 2.7. 考慮單位球

$$\mathbb{B}_n := \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ |z|^2 = 1 \right\},$$

其中 $|z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$。可驗證 $\mathbb{B}_n$ 爲一個強擬凸域。我們用 $B_{\mathbb{B}_n}(z,w)$ 來表示 $\mathbb{B}_n$ 上的柏格曼核。我們有下列的定理:

定理 2.8 (單位球的柏格曼核的具體表示)**.** 我們有

$$B_{\mathbb{B}_n}(z,w)=\frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-z\overline{w})^{n+1}}, \tag{18}$$

其中 $z\overline{w}=z_1\overline{w}_1+z_2\overline{w}_2+\cdots+z_n\overline{w}_n$。

由 (18) 讀者可看出, $B_{\mathbb{B}_n}(z,w)$ 在邊界上有奇異點 (singularities)。接下來, 我們來證明定理 2.8。

證明定理 2.8: 對任意的多重指標 (multi-index) $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n$, 我們用以下的符號:

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1}z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

不難看出

$$\{z^\alpha\}_{\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n}$$

爲 $H^0(\mathbb{B}_n)$ 的一組正交基底 (orthogonal basis)。爲了要得到 $B_{\mathbb{B}_n}(z,w)$, 我們需要找到 $H^0(\mathbb{B}_n)$ 的一組單位正交基底 (orthonormal basis)。爲了達到這目的我們需要計算下列的積分:

$$\|z^\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{B}_n)}:=\int_{\mathbb{B}_n}|z^\alpha|^2\,dx,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\,\{0\})^n)$ 爲一個固定的多重指標 (multi-index)。我們有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}|z^\alpha|^2\,dx\\&=\int_{\mathbb{B}_n}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}\,dx\\&=\int_{\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2\leq 1}\Big(\int_0^{\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2}}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_n|^{2\alpha_n}\,dx_{2n-1}x_{2n}\Big)dx_1\cdots dx_{2n-2}\\&=\frac{\pi}{(\alpha_n+1)}\int_{\mathbb{B}_{n-1}}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}}(1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-1}|^2)^{\alpha_n+1}dx,\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\mathbb{B}_{n-1}=\Big\{(z_1,\ldots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1};\ \sum_{j=1}^{n-1}|z_j|^2<1\Big\}$。爲了要處理積分(19), 我們把下列的恆等式

$$\begin{aligned}&|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}}(1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-1}|^2)^{\alpha_n+1}\\&=|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_{n-2}|^{2\alpha_{n-2}}(1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-2}|^2)^{\alpha_n+1}|z_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}}\\&\times\Big(1-\frac{|z_{n-1}|^2}{1-(\sum_{j=1}^{n-2}|z_j|^2)}\Big)^{\alpha_n+1}\end{aligned}$$

代入積分(19), 我們有

$$\int_{\mathbb{B}_n} \left|z^\alpha\right|^2 dx$$
$$= \frac{\pi}{(\alpha_n+1)} \int_{\mathbb{B}_{n-2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n-2}|z_j|^2}} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_{n-2}|^{2\alpha_{n-2}} (1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-2}|^2)^{\alpha_n+1} \right.$$
$$\left. \times |z_{n-1}|^{2\alpha_{n-1}} \Big(1-\frac{|z_{n-1}|^2}{1-(\sum_{j=1}^{n-2}|z_j|^2)}\Big)^{\alpha_n+1} dx_{2n-3}dx_{2n-2} \right) dx_1\cdots dx_{2n-4}. \tag{20}$$

爲了要處理 (20) 裡對 x_{2n-3}, x_{2n-2} 的積分, 我們先來計算如下的積分:

$$\int_0^{\sqrt{1-a^2}} x^{2s+1}\Big(1-\frac{x^2}{1-a^2}\Big)^{t+1}, \tag{21}$$

其中 $0<a<1$, $s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。我們在 (21) 裡令 $y=\frac{x^2}{1-a^2}$, 則積分 (21) 成爲:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{1-a^2}} x^{2s+1}\Big(1-\frac{x^2}{1-a^2}\Big)^{t+1}\\&=\frac{1}{2}(1-a^2)^{s+1}\int_0^1 y^s(1-y)^{t+1}dy.\end{aligned} \tag{22}$$

積分 (22) 叫貝他函數 *(Beta function)*。

定義 2.9. 對任兩個實部大於 0 的複數 $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, 我們稱這積分值

$$\int_0^1 y^{z_1-1}(1-y)^{z_2-1}dy$$

爲貝他函數在 z_1, z_2 在的值並記爲$B(z_1,z_2)$。

貝他函數是一類很重要的特殊函數。貝他函數和珈瑪函數有下列的關係:

引理 2.10. 對任兩個實部大於 0 的複數 $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, 我們有

$$B(z_1,z_2)=\frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}. \tag{23}$$

引理 2.10 **的證明**: 直接透過計算我們有

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)&=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z_1-1}du\int_0^{+\infty} e^{-v}v^{z_2-1}dv\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-u-v}u^{z_1-1}v^{z_2-1}dudv.\end{aligned} \tag{24}$$

在積分 (24) 中, 我們令 $u = st$, $v = s(1-t)$, 則我們有

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) &= \int_{s=0}^{+\infty}\int_{t=0}^{1} e^{-s}(st)^{z_1-1}(s(1-t))^{z_2-1}sdtds\\ &= \int_{s=0}^{+\infty} e^{-s}s^{z_1+z_2-1}ds\int_{t=0}^{1} t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}dt\\ &= \Gamma(z_1+z_2)B(z_1,z_2).\end{aligned}\tag{25}$$

從 (25), 我們得到 (23)。

從 (23), 我們計算出積分 (22):

$$\begin{aligned}&\int_0^{\sqrt{1-a^2}} x^{2s+1}\Big(1-\frac{x^2}{1-a^2}\Big)^{t+1}\\ &= \frac{1}{2}(1-a^2)^{s+1}B(s+1,t+2)\\ &= \frac{1}{2}(1-a^2)^{s+1}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(t+2)}{\Gamma(s+t+3)}\\ &= \frac{1}{2}(1-a^2)^{s+1}\frac{s!(t+1)!}{(s+t+2)!}.\end{aligned}\tag{26}$$

從積分 (20), (26) 及一些繁瑣的計算, 我們得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}|z^\alpha|^2\,dx\\ &= \frac{\pi}{(\alpha_n+1)}\frac{\pi\Gamma(\alpha_{n-1}+1)\Gamma(\alpha_n+2)}{\Gamma(\alpha_n+\alpha_{n-1}+3)}\\ &\times\int_{\mathbb{B}_{n-2}}|z_1|^{2\alpha_1}\cdots|z_{n-2}|^{2\alpha_{n-2}}\,(1-|z_1|^2-\cdots-|z_{n-2}|^2)^{\alpha_n+\alpha_{n-1}+2}dx_1\cdots dx_{2n-4}.\end{aligned}\tag{27}$$

不斷地重複上述的過程並使用 (26), 我們得到

$$\int_{\mathbb{B}_n}|z^\alpha|^2\,dx = \frac{\pi^n\alpha_1!\cdots\alpha_n!}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n)!}.\tag{28}$$

從 (28), 我們知道

$$\Big\{\Big(\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n)!}{\pi^n\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\Big)^{\frac{1}{2}}z^\alpha;\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n\Big\}$$

爲$H^0(\mathbb{B}_n)$的一組單位正交基底。根據柏格曼核的定義, 我們有

$$\begin{aligned}
B_{\mathbb{B}_n}(z,w) &= \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n)!}{\pi^n\alpha_1!\cdots\alpha_n!} z^\alpha\overline{w}^\alpha \\
&= \frac{1}{\pi^n}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{\sum_{j=1}^n\alpha_j=\ell} \frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n+n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!} z^\alpha\overline{w}^\alpha \\
&= \frac{1}{\pi^n}\sum_{\ell=0}^{+\infty}(\ell+n)(\ell+n-1)\cdots(\ell+1)(z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n)^\ell \qquad (29)\\
&= \frac{1}{\pi^n}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Big(\frac{1}{1-t}\Big)\Big|_{t=z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n} \\
&= \frac{n!}{\pi^n}\frac{1}{(1-z\overline{w})^{n+1}}.
\end{aligned}$$

從 (29), 我們已完全證明了定理 2.8。 □

定理 2.8 的證明大致上是沿著參考書目 [2] 的 Theorem 6.3.3 的證明脈絡稍作改寫而成。

要證明定理 2.4, 我們需要構造出一些滿足特別要求的在M上的全純函數。從費福曼的定理 2.6 或定理 2.8, 我們知道柏格曼核 $B(z,w)$ 在邊界有奇異點, 若要用柏格曼核來構造一些滿足特別要求的在 M 上的全純函數, 使用起來會非常複雜。因此, 一個重要的問題就是我們能否有其他較容易使用的“某種柏格曼核”也能幫我們來構造一些滿足特別要求的在 M 上的全純函數? 我們回憶一下文章一開始引入的半經典分析的想法。在第一節中, 我們考慮積分

$$\int_{\mathbb{B}} e^{-x^2+ix^4}\chi(x)dx.$$

因這積分不容易處理, 我們考慮這積分

$$\int_{\mathbb{B}} e^{k(-x^2+ix^4)}\chi(x)dx$$

在 k 很大時的行爲。許多牽涉到要了解這積分$\int_{\mathbb{B}} e^{-x^2+ix^4}\chi(x)dx$的問題, 其實只要了解這積分 $\int_{\mathbb{B}} e^{k(-x^2+ix^4)}\chi(x)dx$ 在 k 很大時的行爲就足夠。而這積分$\int_{\mathbb{B}} e^{k(-x^2+ix^4)}\chi(x)dx$ 在 k 很大時的行爲是較容易處理的。同樣的思維, 一般的柏格曼核$B(z,w)$不容易處理, 因此我們問下列的問題:

問題 2.2. 我們能否找到一個依賴於 k 的某種核 $A_k(z,w)$, 使得 $A_k(z,w)$ 較原先的 $B(z,w)$ 容易處理, 且當 k 夠大時, 我們能利用 $A_k(z,w)$ 來構造需要的全純函數?

在下一節中我們會回答問題 2.2 並提供一個定理 2.4 的證明。

3. 多複變函數論裡的半經典分析

這一節牽涉到一些較深的數學, 要完全理解需要更多高等數學的背景。讀者若沒接觸過這些高等數學, 不妨試著抓到這節講的多複變函數論與半經典分析的精神。

在這一節中我們要回答問題 2.2。這問題的回答牽涉到的意義是能否利用半經典分析來研究多複變函數論。爲了回答問題 2.2, 我們回到單位球的情況, 來看一下單位球上的 $A_k(z,w)$ 應該是什麼。

在單位球上, 對每個 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 考慮如下的全純齊次多項式:

$$\begin{aligned}H^0_m(\mathbb{B}_n)=&\operatorname{span}\Big\{z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}|_{\mathbb{B}_n};\\&(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n,\quad\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m\Big\}.\end{aligned}$$

令 $\{g_{1,m},\ldots,g_{d_m,m}\}$ 爲 $H^0_m(\mathbb{B}_n)$的一組單位正交基底, $d_m\in\mathbb{N}$。令

$$B_m(z,w):=\sum_{j=1}^{d_m}g_{j,m}(z)\overline{g}_{j,m}(w).\tag{30}$$

顯然的 $B_m(z,w)$ 爲 $\mathbb{B}_n\times\mathbb{B}_n$ 裡的平滑函數且可平滑的延拓到邊界 (smooth up to the boundary) (我們寫 $B_m(z,w)\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{B}_n}\times\overline{\mathbb{B}_n})$)。我們也可嘗試 $B_m(z,w)$ 是否是問題 2.2 裡要的。但 $B_m(z,w)$ 只有由全純齊次多項式所組成, 我們應該要試著包含儘可能多的 $\mathbb{B}_n$ 上的全純函數, 因此考慮 $B_m(z,w)$ 是不夠的。一個自然的想法是對每個 $k\in\mathbb{N}$, 考慮

$$B_{\leq k}(z,w):=\sum_{0\leq m\leq k}B_m(z,w)\in\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{B}_n}\times\overline{\mathbb{B}_n}).\tag{31}$$

則當 k 趨於無限大時, $B_{\leq k}(z,w)$ 會包含所有的 $\mathbb{B}_n$ 上的全純函數, 因此 $B_{\leq k}(z,w)$ 似乎是好選擇。但這個 $B_{\leq k}$ 是在單位球上, 在一般的有界的強擬凸域上, 要怎麼定義 $B_{\leq k}(z,w)$ 呢? 爲了回答這問題, 我們用另一種方式來定義 $B_{\leq k}(z,w)$。令

$$R_0=\sum_{j=1}^{n}\Big(z_j\frac{\partial}{\partial z_j}-\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\Big).\tag{32}$$

R_0 爲一個向量場 (vector field)。我們用 $B_{\mathbb{B}_n}$ 來表示這個垂直投影 (orthogonal projection):

$$B_{\mathbb{B}_n}:L^2(\mathbb{B}_n)\to H^0(\mathbb{B}_n).$$

$B_{\mathbb{B}_n}$ 也叫柏格曼投影 (Bergman projection)。令

$$T_{R_0}:=B_{\mathbb{B}_n}\circ R_0\circ B_{\mathbb{B}_n}:\operatorname{Dom}T_{R_0}\subset L^2(\mathbb{B}_n)\to L^2(\mathbb{B}_n),\tag{33}$$

其中$\mathrm{Dom}\, T_{R_0} := \{u \in L^2(\mathbb{B}_n);\ T_{R_0}u \in L^2(\mathbb{B}_n)\}$。用現代數學的語言, T_{R_0} 爲一個在單位球上的拓普立茲算子 (Toeplitz operator on $\mathbb{B}_n$)。可證明 T_{R_0} 的特徵空間恰好是所有的全純齊次多項式 $H^0_m(\mathbb{B}_n)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。從這觀點, $B_{\leq k}(z, w)$ 事實上是由 T_{R_0} 的所有特徵值小於或等於 k 的單位正交特徵向量所組成。這樣的定義方式可適用在任何的有界的強擬凸域上。底下, 我們就來在一般的有界的強擬凸域上定義 $B_{\leq k}$。

令 $M := \{z \in \mathbb{C}^n;\ \rho(z) < 0\}$ 爲一個有界的強擬凸域。令

$$R := \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \rho}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \Big). \tag{34}$$

可容易看出, 當 M 爲單位球時, R 恰好是 (32)的R_0。事實上, 用切觸幾何 (contact geometry) 的語言, R 限制在 M 的邊界上, 是 M 的邊界的一個里伯向量場(Reeb vector field)。我們用 B 來表示這個垂直投影 (orthogonal projection):

$$B : L^2(M) \to H^0(M).$$

B爲M的柏格曼投影 (Bergman projection)。仿造(33), 令

$$T_R := \frac{1}{2}\Big(B \circ (R + R^*) \circ B\Big) : \mathrm{Dom}\, T_R \subset L^2(M) \to L^2(M), \tag{35}$$

其中 R^* 爲 R 對於 M 上的內積的伴隨 (adjoint),

$$\mathrm{Dom}\, T_R := \big\{u \in L^2(M);\ T_R u \in L^2(M)\big\}.$$

利用一些較深的偏微分方程的技巧可證明, T_R 爲一個自伴隨算子 (self-adjoint operator) 且 T_R 的譜 (spectrum) 由離散有下界的特徵值所組成, 只有正無窮遠爲極限點 (T_R consists only of isolated eigenvalues, is bounded from below and has only $+\infty$ as a point of accumulation), 且每個非零的特徵值對應的特徵向量空間 (eigenspace) 都是由 $H^0(M)$ 上的可平滑的延拓到邊界的全純函數所組成的有限維向量空間。我們用 $\mathrm{Spec}\, T_R$ 記爲 T_R 的所有的特徵值的集合。對每個 $\lambda \in \mathrm{Spec}\, T_R$, $\lambda \neq 0$, 令 $E_\lambda := \{u \in \mathrm{Dom}\, T_R;\ T_R u = \lambda u\}$。利用一些偏微分方程的技巧可證明 $E_\lambda \subset H^0(M) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$。對每個$\lambda \in \mathrm{Spec}\, T_R$, $\lambda \neq 0$, 令

$$\{f_{1,\lambda}, \ldots, f_{d_\lambda,\lambda}\} \subset H^0(M) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$$

爲 E_λ 裡的一組單位正交基底, 這邊 $d_\lambda \in \mathbb{N}$。仿造 (30), 對每個 $\lambda \in \mathrm{Spec}\, T_R$, $\lambda \neq 0$, 令

$$B_\lambda(z, w) := \sum_{j=1}^{d_\lambda} f_{j,\lambda}(z)\overline{f}_{j,\lambda}(w). \tag{36}$$

仿造 (31), 令

$$B_{\leq k}(z,w) := \sum_{\lambda\in \operatorname{Spec} T_R, \lambda\neq 0} B_\lambda(z,w) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}\times\overline{M}). \tag{37}$$

當 k 趨於無窮時, $B_{\leq k}(z,w)$ 會包含所有的 M 上的全純函數, 因此 $B_{\leq k}(z,w)$ 似乎是好選擇且可似乎回答問題 2.2。但當我們進一步的想要用近代數學的工具來研究 $B_{\leq k}(z,w)$ 的漸近行爲時, 會遭遇困難 (要說明這現象會需要引進更多的近代數學, 如譜理論 (spectral theory) 等知識, 礙於篇幅, 我們不多做描述)。爲了克服困難, 我們要把 $B_{\leq k}(z,w)$ 的定義稍作改變。令 I 爲 $\mathbb{R}_+$ 裡的一個有界的開區間, $0\notin \overline{I}$。令 $\chi\in\mathcal{C}^\infty_c(I)$ 爲 $\mathbb{R}$ 上的非負且不恆等於零的截斷函數 (cut-off function) 且 χ 的支集在 I 裡的緊緻集內。令

$$A_k(z,w) := \sum_{\lambda\in \operatorname{Spec} T_R, \lambda\neq 0} \chi(\frac{\lambda}{k}) B_\lambda(z,w) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}\times\overline{M}). \tag{38}$$

值得注意的是, 和 (37) 不同的是, (38) 裡多了一個權重 (weight) $\chi(\frac{\lambda}{k})$。和 (37)不同的是, 加了權重$\chi(\frac{\lambda}{k})$, 我們可用半經典分析及譜理論的方法來研究$A_k(z,w)$的漸近行爲。最重要的原因是 $A_k(z,w)$ 其實是譜理論裡的泛函計算 (functional calculus), 在泛函計算裡有一種公式叫厄樂斐-史約使坦公式 (Helffer-Sjöstrand formula) 能夠給出一般泛函計算的計算方式。搭配厄樂斐-史約使坦公式及半經典分析, 我們能了解 $A_k(z,w)$ 的漸近行爲。有關譜理論及厄樂斐-史約使坦公式, 讀者可參閱 [3]。$A_k(z,w)$定義了一個算子:

$$\begin{aligned} A_k : L^2(M) &\to H^0(M). \\ u &\to \int_M A_k(z,w)u(w)dy. \end{aligned} \tag{39}$$

如果我們能了解 $A_k(z,w)$ 的漸近行爲, 則由 (39), 我們能夠構造出很多的 M 上的全純函數。有關 $A_k(z,w)$ 的漸近行爲是由筆者和德國數學家馬林內斯估(Marinescu) 得到, 請參閱 [6]。準確的說, 在 [6]裡, 我們證明了如下的定理

定理 3.11. 在之前的符號之下, 在 $\overline{M}\times\overline{M}$ 上我們有

$$A_k(z,w) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(z,w)} b(z,w,t,k)dt + O(k^{-\infty}), \tag{40}$$

$$\begin{aligned} & b(z,w,t,k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z,w,t)k^{n+1-j}, \\ & b_0(z,z,t)|_{\partial M} \neq 0, \\ & b_j(z,w,t), b(z,w,t,k) \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{M}\times\overline{M}\times I), \quad I \Subset \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
&\Psi(z,w)\in\mathcal{C}^\infty(\overline{M}\times\overline{M}),\quad \operatorname{Im}\Psi\geq 0,\\
&\Psi(z,z)=-2i\rho(z), \qquad\qquad (42)\\
&\operatorname{Im}\Psi(z,w)\approx \operatorname{dist}(z,\partial M)+\operatorname{dist}(w,\partial M).
\end{aligned}$$

對初學者而言, 定理 3.11 雖然有點複雜, 但我們試著解釋一下定理 3.11, 即使讀者無法完全了解定理 3.11, 只要抓到精神就非常好了。(40) 的意思是存在這個積分 $\int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(z,w)}b(z,w,t,k)dt$ 使得對任意的 ℓ, $N\in\mathbb{N}$, 都存在一個和 k 無關的常數 $C_{\ell,N}>0$ 使得對所有的 $k>0$,

$$\left\|A_k(z,w)-\int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(z,w)}b(z,w,t,k)dt\right\|_{\mathcal{C}^\ell(\overline{M}\times\overline{M})}\leq C_{\ell,N}k^{-N}. \qquad (43)$$

這邊對每個 $f\in\mathcal{C}^\ell(\overline{M}\times\overline{M})$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{C}^\ell(\overline{M}\times\overline{M})}:=\sup\Big\{\,&\big|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta f(x,y)\big|;\ (x,y)\in\overline{M}\times\overline{M},\\
&\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}),\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^{2n},\\
&\sum_{j=1}^{2n}\alpha_j+\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\leq\ell\Big\}.
\end{aligned}$$

直觀上, (43) 的意思是當 k 很大時, $A_k(z,w)$ 可和這積分

$$\int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(z,w)}b(z,w,t,k)dt$$

任意接近。

在 (41) 中, $b(z,w,t,k)$ 爲一個依賴於 k 的在 $\overline{M}\times\overline{M}\times I$ 上的平滑函數且 $b(z,w,t,k)$ 對 t 在 I 裡有緊緻支集(compact support)。提醒讀者注意, χ 的支集在 I 內, I 爲 $\mathbb{R}_+$ 的有界的開區間, $0\notin\overline{I}$。

在 (41) 中 $b(z,w,t,k)\sim\sum_{j=0}^\infty b_j(z,w,t)k^{n+1-j}$ 的意思是對任意的 ℓ, $N\in\mathbb{N}$, 都存在一個和 k 無關的常數 $C_{\ell,N}>0$ 使得對所有的 $k>0$,

$$\left\|b(z,w,t,k)-\sum_{j=0}^N b_j(z,w,t)k^{n+1-j}\right\|_{\mathcal{C}^\ell(\overline{M}\times\overline{M}\times I)}\leq C_{\ell,N}k^{-N-1}. \qquad (44)$$

用專業術語, 我們說 $b(z,w,t,k)$ 存在漸近展開 (asymptotic expansion)。

從 (42) 的最後一個式子, 我們可看出當 z,w 在 M 裡的一個緊緻集 K 且 K 遠離邊界時 $(K\cap\partial M=\emptyset)$, 我們有

$$|A_k(z,w)|\leq Ce^{-k\operatorname{Im}\Psi(z,w)}k^{n+1}=O(k^{-\infty}), \qquad (45)$$

對所有的 $z,w\in K$, 其中 $C>0$ 爲一個常數。

從 (39), 我們可利用定理 3.11 來構造在 M 上的全純函數。比如說選一個特別的 $u\in\mathcal{C}^\infty(\overline{M})$, 則 A_ku 爲一個 M 上的全純函數。從定理 3.11, 我們知道

$$(A_ku)(z)=\int e^{ikt\Psi(z,w)}b(z,w,t,k)u(w)dydt+O(k^{-\infty}). \tag{46}$$

我們可利用類似霍曼德的穩定相公式定理 1.1來處理積分 (46) 並了解 A_ku 當 k 夠大的行爲。從這方法, 我們可透過選取 u 來構造出所需要的在 M 上的全純函數。

本文的最後, 我們向讀者介紹一個證明定理 2.4 的思路。從這介紹, 讀者應能看到利用定理 3.11 及 (46) 來構造 M 上的全純函數在整個證明中扮演著最關鍵的角色。

定理 2.4 的證明的概括: 我們給定兩個 $\mathbb{C}^n$ 裡的有界的強擬凸域 M_1, M_2. 假設

$$F:M_1\to M_2$$

爲一個雙全純映射。我們要證明 F 可平滑的延拓到 M_1 的邊界。令 $B_1(z,w)$, $B_2(z,w)$ 分別爲 M_1, M_2上的柏格曼核。不難看出, $B_1(z,w)$ 和 $B_2(z,w)$ 有如下的關係式

$$B_1(z,w)=B_2(F(z),F(w))\det F'(z)\overline{\det F'(w)}. \tag{47}$$

提醒讀者注意, 若我們將 F 寫成 $F:=(F_1,\ldots,F_n):M_1\to M_2$, 則 $F'(z)$ 爲以下的矩陣:

$$F'(z):=\left(\frac{\partial F_j}{\partial z_\ell}(z)\right)_{j,\ell=1}^n.$$

這邊 $\det F'(z)$ 指的是 $F'(z)$ 的行列式值。我們先證明:

$$\det F'(z) \text{ 在 } M_1 \text{ 上是有界的。} \tag{48}$$

我們用反證法來證明 (48)。假設(48)不對。則我們可找到 M_1 裡的序列 $\{x_s\}_{s=1}^{+\infty}\subset M_1$ 滿足 $\lim_{s\to+\infty}x_s=p\in\partial M_1$, 使得

$$\lim_{s\to+\infty}|\det F'(x_s)|=+\infty. \tag{49}$$

假設 $\lim_{s\to+\infty}F(x_s)=q\in\partial M_2$。我們可用 (46) 來構造 M 上的全純函數而得到下列的結果: 我們可找到 M_2 裡的 n 個不同的點 $a_0,a_1,\ldots,a_n\in M_2$ 使得

$$B_2(q,a_0)\neq 0, \tag{50}$$

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big(\frac{B_2(x,a_\ell)}{B_2(x,a_0)}\Big)\right)_{j,\ell=1}^n|_{x=q}\neq 0. \tag{51}$$

上述的證明需要複雜的計算, 礙於篇幅, 我們省略細節。我們只大概說明一下證明 (50) 及 (51) 的思路。在 (50) 及 (51) 中, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 其實是非常靠近邊界的點。固定一點 $q \in M_2$, 選一個 $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}_2)$, 且 u 的支集 (support) 落在 q 點附近的非常小的鄰域。從定理 3.11, 我們知道

$$(A_k u)(z) = \int e^{ikt\Psi(z,w)} b(z,w,t,k) u(w) dydt + O(k^{-\infty}). \tag{52}$$

從 (45) 可知 $A_k u$ 這個全純函數的支集在邊界 ∂M_2 外面非常小, 且又由類似霍曼德的穩定相公式定理 1.1 可了解 $A_k u$ 的 k 夠大的行爲。透過上述的過程, 我們可選到特殊的 $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}_2)$, 且 u_0 的支集 (support) 落在 q 點附近的非常小的鄰域, 使得

$$|(A_k u_0)(q)| \geq 1, \text{ 且在邊界附近的一個小鄰域外面, } |A_k u_0| \leq \tfrac{1}{2}\text{。} \tag{53}$$

同樣的, 對每個 $j = 1, \ldots, n$, 我們可選到特殊的 $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M}_2)$, 且 u_j 的支集 (support) 落在 q 點附近的非常小的鄰域, 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{\partial}{\partial z_j}(A_k u_j)(q)\right| \geq 1,\ \left|\tfrac{\partial}{\partial z_\ell}(A_k u_\ell)(q)\right| \leq \tfrac{1}{2},\ \ \ell = 1, \ldots, n,\ \ \ell \neq j,\\
&\text{且在邊界附近的一個小鄰域外面,}\\
&|A_k u_j| \leq \tfrac{1}{2},\ \left|\tfrac{\partial}{\partial z_\ell}(A_k u_j)\right| \leq \tfrac{1}{2},\ \ell = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{54}$$

從 (53) 及 (54), 我們可得到 (50) 及 (51)。這邊需要一些計算, 礙於篇幅我們就不多作說明。但讀者可看到用定理 3.11 及 (46) 來構造 M 上的全純函數是非常重要的。

我們回到(48)的證明。從(47), 我們有

$$B_1(x_s, F^{-1}(a_0)) = B_2(F(x_s), a_0) \det F'(x_s) \overline{\det F'(F^{-1}(a_0))}. \tag{55}$$

從反證法的假設 (49) 及 (55), 我們得到

$$B_2(q, a_0) = 0.$$

但這和 (50) 矛盾, 因此我們完成了 (48) 的證明。相似的, 我們可證明 $\det(F^{-1})'(x)$ 在 M_2上是有界的, 因此

$$\det F'|_{\partial M_1} \neq 0. \tag{56}$$

我們現在證明 F 可平滑的延拓到邊界。我們用之前的符號, 令 $p = F^{-1}(q) \in \partial M_1$。我們要證明在 p 附近, F 可平滑的延拓到邊界。由 (47), (50) 及 (56), 我們可知 $B_1(z, F^{-1}(a_0)) \neq 0$ 當 z 夠靠近 p。令

$$u_j(z) := \frac{B_1(z, F^{-1}(a_j))}{B_1(z, F^{-1}(a_0))}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{57}$$

$$v_j(z) := \frac{B_2(z, a_j)}{B_2(z, a_0)}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{58}$$

從 (51), 我們可看出

$$\{v_1, \ldots, v_n\}$$

是一組定義在 q 附近的全純局部座標 (a system of local holomorphic coordinates defined near q)。從 (47) 及透過一些複雜但基本的計算可得到

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big(\frac{B_1(x, F^{-1}(a_\ell))}{B_1(x, F^{-1}(a_0))}\Big)\Big)_{j,\ell=1}^{n}\\ &= \Big(\frac{\partial F_\ell}{\partial z_j}(x)\Big)_{j,\ell=1}^{n} \circ \Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\Big(\frac{B_2(F(x), a_\ell)}{B_2(F(x), a_0)}\frac{\det F'(a_\ell)}{\det F'(a_0)}\Big)\Big)_{j,\ell=1}^{n}.\end{aligned} \tag{59}$$

從 (51) 及 (59), 我們可看出

$$\{u_1, \ldots, u_n\}$$

是一組定義在 $p = F^{-1}(q)$ 附近的全純局部座標 (a system of local holomorphic coordinates defined near $p = F^{-1}(q)$)。不妨假設 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ 爲定義在 $U \cap M_1$的全純局部座標, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 爲定義在 $F(U) \cap M_2$ 的全純局部座標, 其中 U 爲包含 p 的小開集。從 (47), 我們有

$$v_j(F(z)) = \overline{\Big(\frac{\det F'(F^{-1}(a_0))}{\det F'(F^{-1}(a_j))}\Big)}u_j(z), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{60}$$

我們把 F 在 $U \cap M_1 \to F(U) \cap M_2$ 用全純局部座標

$$\{u_1, \ldots, u_n\}, \quad \{v_1, \ldots, v_n\},$$

來表達, 從 (60), 我們可看出 F 爲下列的形式:

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{diag}\Big(\overline{\Big(\frac{\det F'(F^{-1}(a_0))}{\det F'(F^{-1}(a_1))}\Big)}, \ldots, \overline{\Big(\frac{\det F'(F^{-1}(a_0))}{\det F'(F^{-1}(a_n))}\Big)}\Big). \tag{61}$$

從 (61), 我們知道用全純局部座標 $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$, 來表達這個雙全純映射 F, 則 F 爲一個常數對角矩陣, 因此 F 可平滑的延拓到 $M_1 \cap U$ 的邊界。因爲 U 爲任取的, 因此我們已證明了 F 可平滑的延拓到 M_1 的邊界。 □

註記 3.2. 在最後提到的定理 2.4 的證明, 主要是改寫 Bell 及 Ligocka 的文章 [1]。最大的不同是在 Bell 及 Ligocka 的文章中, 他們利用多複變函數論裡的有關 $\overline{\partial}$-紐曼算子 ($\overline{\partial}$-Neumann operator) 的估計, 條件 R (condition R) 等技術, 而我們則是用半經典分析的方法。

参考文獻

1. S. Bell and E. Ligocka, *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. 57(1980), no.3, 283–289.
2. S.-C. Chen and M.-C. Shaw, *Partial differential equations in several complex variables*, AMS/IP Stud. Adv. Math., 19 American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2001. xii+380 pp.
3. E. B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, 182 pp.
4. K. Oka, Kiyoshi, *Collected papers*, Translated from the French by R. Narasimhan. With commentaries by H. Cartan. Edited by R. Remmert Springer-Verlag, Berlin, 1984. xiv+223 pp.
5. L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1966, x+208 pp.
6. C.-Y. Hsiao and G. Marinescu, *Semi-classical Spectral Asymptotics of Toeplitz Operators on Strictly Pseudodonvex Domains*, The Bergman Kernel and Related Topics, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 447. Springer, Singapore.

—本文作者任職中央研究院數學研究所—